



СИСТЕМАТИКА

Решение задач конкурса «Кенгуру». 18 марта 2021

9-10 класс

Задачи на 3 БАЛЛА

1. Правильный ответ: Г

Подсчитаем для каждой вершины число треугольников равнобедренных, но не правильных. Его вершина, в которой сходятся две равные стороны, является вершиной для трех таких треугольников. И так как всего вершин 9, то получаем $3 \cdot 9 = 27$ равнобедренных треугольников. Кроме того, в девятиугольник можно вписать еще 3 различных правильных треугольника. Всего же будет $27 + 3 = 30$.

2. Правильный ответ: Б

Сравниваем пути. У всех – одинаково нижнее основание и боковая сторона. Разница – в путях внутри треугольника. Получится самый маленький Р, длиннее его путь R, самый длинный – Q.

3. Правильный ответ: Б

Рассматривая рисунок, замечаем прямоугольник, у которого известны две характеристики: площадь и длина стороны. Находим другую его сторону: $16 \div 6 = 8/3$. Эта сторона общая с прямоугольником, площадью 12. Отсюда находим вторую сторону этого прямоугольника: $12 \div 8/3 = 9/2$. Действуем так же с каждым последующим прямоугольником. Получаем: $18 \div 9/2 = 4$, $32 \div 4 = 8$, $48 \div 8 = 6$, $30 \div 6 = 5$ – это высота последнего прямоугольника

4. Правильный ответ: Б

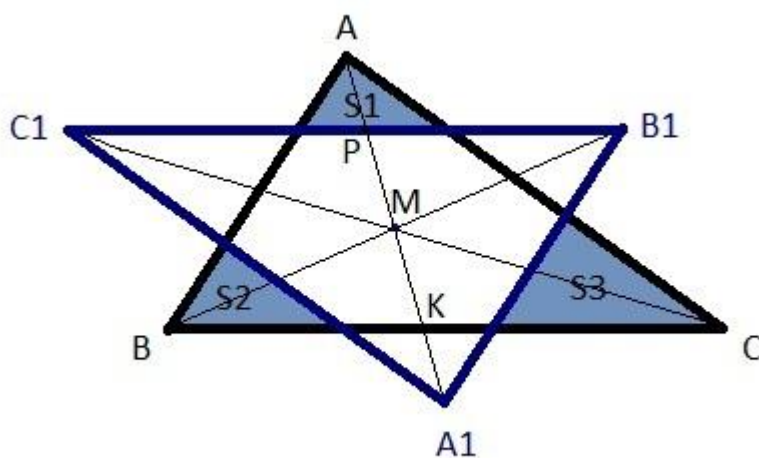
Пусть во втором тайме гости забили x голов, тогда хозяева забили $2x$ голов. Получаем уравнение: $14 + x + 1 = 9 + 2x$, Получаем, что $x = 6$. Т.е. гости забили всего $14 + 6 = 20$ голов, а хозяева $9 + 6 \cdot 2 = 21$ гол. Значит, игра закончилась со счетом 20:21.

5. Правильный ответ: В

Центр тяжести треугольника (центроид) – это точка пересечения медиан, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины. Чтобы получить вершины симметричного треугольника, медиану продлеваем от точки пересечения за сторону на такую же длину. Симметричные треугольники равны, соответствующие элементы в них тоже равны и симметричные стороны параллельны, поэтому отсеченные треугольники подобны данному с коэффициентом подобия $1/3$.

Далее для наглядности см. рисунок в первом комментарии:

На рисунке BC равна и параллельна C_1B_1 , $AM = MA_1$, $MK = A_1K = 1/3(AK) = AP$. Треугольник с площадью S_1 подобен данному и его площадь равна $1/9$ от площади данного. В сумме треугольники с площадями S_1, S_2, S_3 будут иметь площадь, равную $1/3$ площади данного. Тогда площадь общей части симметричных треугольников составляет от площади данного $2/3$



6. Правильный ответ: Г

На рисунке показаны два прямоугольных треугольника с площадями 10 и 8 и один из них равнобедренный. Значит, третий треугольник равнобедренный, не прямоугольный с площадью 10 или 8. Подходит только вариант Г.

7. Правильный ответ: В

В правильном шестиугольнике радиус – (большая диагональ ромба) равен стороне шестиугольника. Тогда площадь белых треугольников будет в 2 раза меньше площади ромба, т.е. 2,5 кв.см. Считаем: $5 \cdot 6 + 2,5 \cdot 6 = 45$ кв.см.

8. Правильный ответ: В

Пусть Диме, Сереже и Лизе по x лет. Среднее арифметическое возраста всех участников группы - 21 год. Тогда составляем уравнение: $(3x + 19 + 20 + 21) \div 6 = 21$. Решив это уравнение, получим: $x = 22$.

Задачи на 4 БАЛЛА

9. Правильный ответ: В

Исходная комбинация: 1,2,3,4,5,7,8. Подсчитываем все возможные комбинации, пропуская 1 или 2 числа. Таких комбинаций возможно 8.

10. Правильный ответ: Б

Применяем свойство: среднее арифметическое чисел больше или равно их среднему геометрическому.

$$(1/a + 1/b) \cdot (4 + ab) \geq 2 \sqrt{(1/ab)} \times \sqrt{4ab} = 8. \text{ Ответ } 8$$

11. Правильный ответ: А

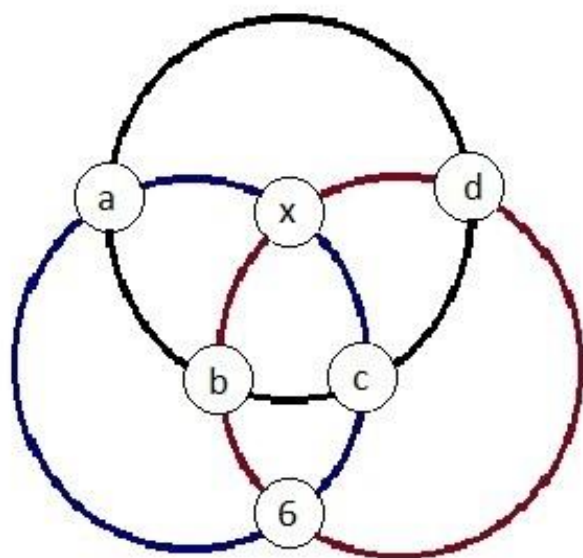
Обозначим числа в кружочках буквами (см. поясняющий рисунок в первом комментарии). Согласно условию получатся равенства: $a + b + c + d = a + x + c + 6 = 6 + b + x + d$.

Из первого и второго равенств следует, что $b + d = x + 6$.

Из второго и третьего равенств получаем, что: $a + c = b + d$.

Сумма всех чисел в кружочках равна $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Отсюда имеем уравнение: $x + a + b + c + d + 6 = 21$.

Заменяем в нем $(b+d)$ и равное ему $(a+c)$ на равное им $(x+6)$.
Получим: $2(x+6)+x+6=21$, откуда находим, что $x=1$.



Задание 11

12. Правильный ответ: Д

Подсчитаем количество всех детей, получится $9+15+17+19+21=81$.
Стартовала команда с x детьми. Количество оставшихся $(81-x)$.
Количество мальчиков (обозначим его y) среди оставшихся будет равно $(81-x) \div 4$. Число y , как и число x принимает одно из значений количества членов команд - то есть одно из чисел: 9, 15, 17, 19, 21. Проверяем каждое и получаем, что подходит $x=21$.

13. Правильный ответ: А

Числа, обладающие этим свойством, образуют арифметическую прогрессию, уменьшающуюся на число, кратное указанным.
Наименьшее положительное число, которое без остатка делится на 6, 7, 8 и 9 равно $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Уменьшая последовательно число 2021 на 504, получим остальные числа, обладающие этим свойством: 1517, 1013, 509, 5. Итого - четыре числа.

14. Правильный ответ: В

К нулям нижнего левого подквадрата 13 раз прибавляли 1. Тогда $47-13=34$, это количество прибавлений 1 к нулям в правом и левом верхнем и правом нижнем подквадратах. В сумме в правом верхнем и левом верхнем прибавили 18 единиц, тогда в нижнем правом прибавили $34-18=16$ единиц – это число, стоящее в квадратике со знаком вопроса.

a	a+b	b
a+c	a+b+c+d	b+d
c	c+d	d

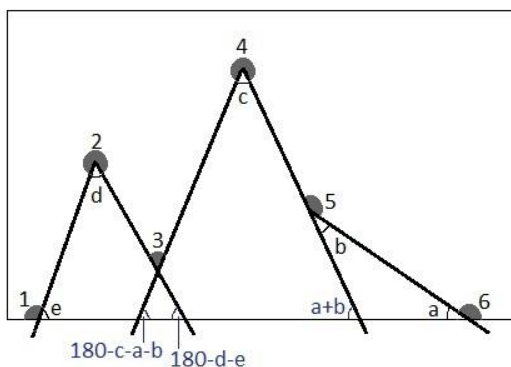
Задание 14

15. Правильный ответ: В

Проще решить эту задачу, обозначая углы разными буквами и выражая остальные через них. Для этого достроим фигуру, выделив треугольники, как на рисунке (см. рисунок в первом комментарии). Обозначим некоторые углы a, b, c, d и e . Тогда сразу находим, что второй справа угол будет равен $(a+b)$, третий справа – $(180-d-e)$, а второй слева – $(180-c-a-b)$. Они показаны на рисунке.

Угол 3 равен: $180-(180-d-e)-(180-c-a-b)=-180+d+e+c+a+b$.

Сумма всех шести интересующих нас углов составит: $(180-e)+(360-d)+(-180+d+e+c+a+b)+(360-c)+(180-b)+(180-a)=1080$.



Задание 15

16. Правильный ответ: Д

Заполняя клеточки последовательно, получим, что в предпоследней правой клетке находится число 2024. Тогда $a=2024+2021=4045$

Задачи на 5 БАЛЛОВ

17. Правильный ответ: В

Из первого равенства следует, что: $(a+b)=-c$, $(b+c)=-a$, $(c+a)=-b$. Умножая их, получим $(-abc)=-78$.

18. Правильный ответ: А

Наименьшее число с конкретной суммой цифр будет содержать как можно меньше разрядов, и тогда, как можно больше девяток. $2021 \div 9 = 224$ (остаток 5). Число $N=599...9999$. В нем 224 девятки. Прибавляем 2021, получим число 600....02020. Его сумма цифр - 10.

19. Правильный ответ: Д

Семен набрал 19 баллов, один из вариантов $19=6 \cdot 3 + 1$, 3 слова в этом случае общие. Этот вариант не подходит, так как, в этом случае, максимальное число баллов у Артема равно 21, а у второго тогда должно быть 20, что невозможно. Это значит, что у Семена баллы получились $19=5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0$, тогда у каждого есть 1 одно общее слово. 4 слова по 1 очку он делит с двумя другими: 3 – со вторым мальчиком и 1 с Артемом. Баллы второго мальчика: $6 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 21$, баллы Артема: $8 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 25$.

20. Правильный ответ: Г

Пусть $a=r^2$, $b=q^2$. Тогда $r^2-q^2=(r-q) \cdot (r+q)$ – простое число по условию. Простое число раскладывается только на два множителя: 1 и само себя. Тогда $r-q=1$ (т.к. оно точно меньше из двух). Подбираем из предложенных:

Вариант А: $q=10$, тогда $r=11$, $10+11$ – не простое, не подходит;

Вариант В: $q=12$, тогда $r=13$, $12+13=25$ – не подходит.

Перебирая таким образом все предложенные варианты, находим, что подойдет вариант Г.

21. Правильный ответ: Г

Будет рассматривать возможные варианты. Для наглядности они изображены на рисунке в первом комментарии.

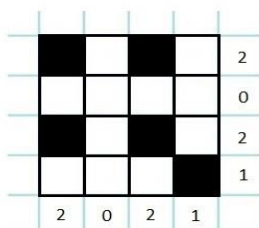
Начнем с квадрата (1;1), тогда возможен единственный вариант раскраски, рисунок 1.

Теперь первым раскрасим квадратик (1 по горизонтали, 2 – по вертикали), в этом случае возможны два варианта раскраски остальных квадратов, рисунок 2.

Когда начнем раскраску с верхней правой клеточки, то в этом случае возможны 2 вида раскраски остальных квадратов, рисунок 3.

Всего получается 5 разных вариантов.

Рис.1



Задание 21

Рис.2

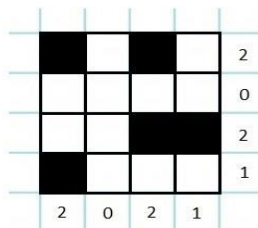
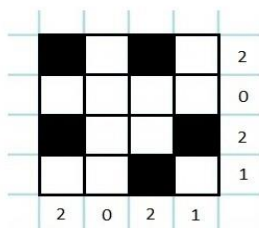
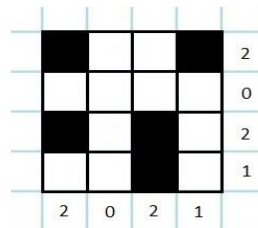
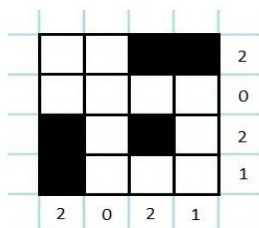


Рис.3



22. Правильный ответ: В

Расположим числа, равные весу монет в порядке возрастания, пусть это ряд: a, b, c, d, e, f, g, h . По условию они все различны, наибольшее число обозначено буквой h . Нужно найти наименьшее значение, тогда a - тоже наименьшее и равно 1. $1+d > b+c$, тогда наименьшее $d = 5$. Далее, рассуждая аналогично, получим искомый ряд чисел: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Значит самая тяжелая монета весит 34 грамма.

23. Правильный ответ: Г

Среди любых пяти последовательных шаров есть один красный, один желтый, один синий и два зеленых. Сказанное выше справедливо как для первых пяти, так и для последних пяти шаров. Рассмотрим любые шесть последовательных шаров. Отсюда следует, что первый и шестой шары имеют одинаковый цвет. Следовательно, цвет любого шара повторяется после пяти последовательных шаров. Таким образом, шар с номером 20 имеет тот же цвет, что и шар с номером 5 (так как $20 = 5 \cdot 3 + 5$). Шарик с номером 202 имеет тот же цвет, что и шарик с номером 2 (так как $202 = 5 \cdot 40 + 2$). Таким образом, шары с номером 2 и с номером 5 - зеленые. Шар с номером 2021 имеет тот же цвет, что и шар с номером 1 ($2021 = 5 \cdot 404 + 1$). Отсюда следует, что шар номер 3 - красный, номер 4 - желтый и номер 1 - синий. Следовательно, шар с номером 2021 имеет синий цвет.

24. Правильный ответ: Б

Обозначим некоторые стороны и углы как на рисунке (см. рисунок в первом комментарии): $AC = CD = a$, $CB = x$, угол $CAB =$ углу $DCB = \alpha$, угол $BCA = \beta$.

Площадь большого квадрата в этом случае будет a^2 .

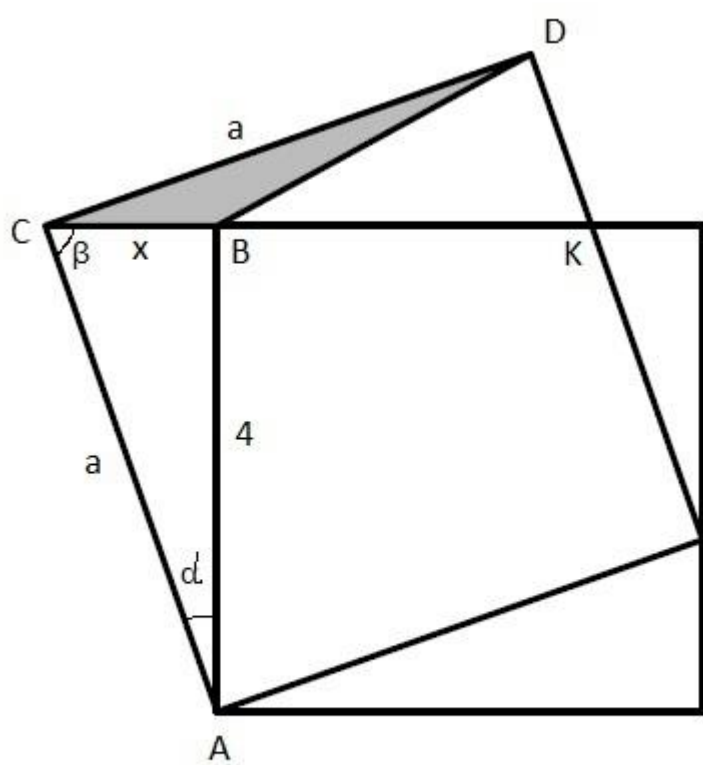
Видим, что треугольник ABC прямоугольный, тогда $\alpha = 90 - \beta$.

Площадь треугольника CBD $S = 1 = (1/2)ax \cdot \sin \alpha$.

Из треугольника ABC находим $\sin \alpha = x/a$. Тогда $1 = (1/2)ax(x/a)$.

Отсюда получаем, что $x^2 = 2$.

Т.к. $a^2 = x^2 + 4^2$, то находим, что $a^2 = 2 + 16 = 18$.



Задание 24