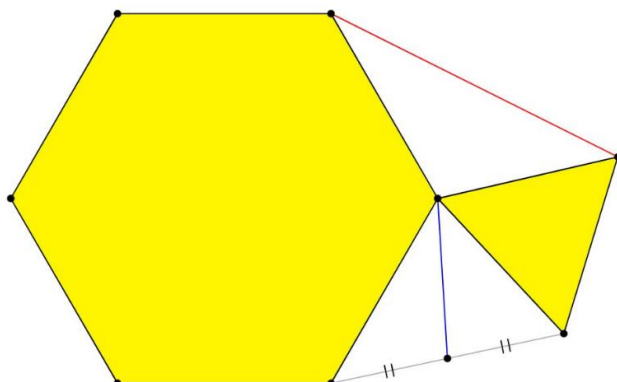




1. Докажите, что синий отрезок в два раза короче красного (см. рисунок).

Желтые фигуры - это правильный треугольник и правильный шестиугольник, имеющие общую вершину



2. Можно ли представить число 10^{2023} в виде суммы двух кубов натуральных чисел?
3. Маша считает, что трёхзначное число делится на 11, если работает следующее правило: цифра в центре равна сумме цифр по краям. А Саша посчитал сколько трёхзначных чисел делятся на 11, но для которых правило Маши не работает.
Сколько чисел насчитал Саша?
4. Прямоугольный параллелепипед $3 \times 5 \times 7$ составлен из кубических лампочек $1 \times 1 \times 1$. Робот начинает передвигаться по поверхности параллелепипеда следующим образом: с лампочки, на которой он стоит, он может перейти на другую грань этой лампочки или на лампочку, смежную с ней. Если лампочка, на которую наступил робот, была выключена, то она загорается. Если лампочка была включена, то она гаснет. Если робот перемещается по граням одной и той же лампочки, она не включается и не выключается.
Может ли робот зажечь все лампочки, обойдя каждую клетку по одному разу, если на момент начала движения горит только лампочка, на которой стоит робот и эту клетку посещать больше нельзя?

5. Чтобы отпраздновать постройку Дома Дружбы Чебурашка и его друзья решили устроить пир. Для этого они расставили 19 блюд на прямоугольном столе размера $1,1 \times 1,4$ метра так, чтобы от центра каждого блюда до краев стола было целое число дециметров. Блюдо представляет собой круг диаметром 20 см. Края блюд не могут выходить за границы стола.

Докажите, что Чебурашка сможет уместить еще одно блюдо на столе.

6. У каждого из 333 участников научной конференции не более двух очень близких друзей. Оказавшись в одном зале, близкие друзья немедленно начинают слишком громко обсуждать свои научные исследования и срывают конференцию.

Какое наименьшее число залов необходимо иметь организаторам конференции, чтобы всё прошло без срывов?

7. Про числа x, y, z известно, что

$$\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+2} = \frac{z}{z+3} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 54.$$

Вычислите значение суммы $x+y+z$.

8. Доказать, что для любых положительных x_1, x_2, x_3

$$x_1x_2x_3 + \frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_1x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2x_3}{x_1} + \frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_2x_3} \geq 8$$