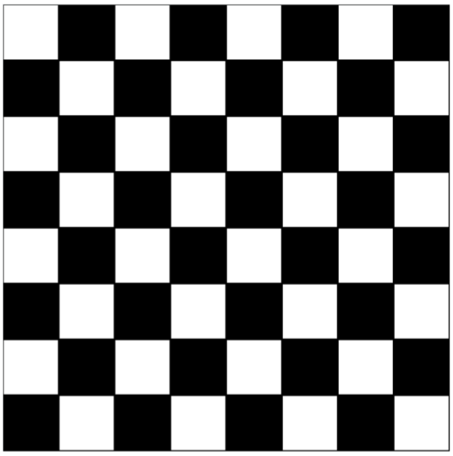
3-я Олимпиада, Осень 2018

5-7 класс

Задача 1.

На шахматную доску 8x8 брызнули чёрной и белой краской. Оказалось, что чёрно-белых (испачканных) клеток в пять раз больше, чем чисто черных, а чисто белых клеток осталось меньше десяти. Сколько осталось чисто чёрных и чисто белых клеток?



Для начала посчитаем изначальное количество чёрных и белых клеток. Всего клеток на шахматной доске 8x8: $8 \cdot 8 = 64$ (клетки). Обозначим чисто чётные клетки «ЧЧ», чисто-белые «ББ», чёрно белые «ЧБ». Из условия задачи мы знаем:

$$\text{ЧБ} = 5 \cdot \text{ЧЧ}$$

$$\text{ББ} < 10$$

Всего клеток так и осталось 64: $\text{ЧБ} + \text{ЧЧ} + \text{ББ} = 64$, причём количество клеток не может быть нецелым. Заменим в последнем выражении ЧБ на $5 \cdot \text{ЧЧ}$:

$$5 \cdot \text{ЧЧ} + \text{ЧЧ} + \text{ББ} = 64$$

$$6 \cdot \text{ЧЧ} + \text{ББ} = 64$$

То есть, $(64 - \text{ББ})$ должно делиться на 6. Найдём числа, меньшие 64, делящиеся на 6:

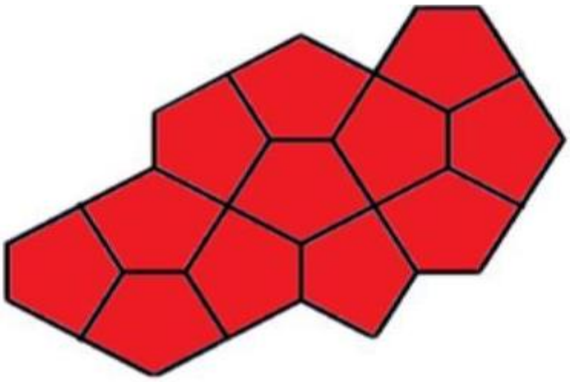
$$60, 54$$

Мы знаем, что $\text{ББ} < 10$. Значит, единственное подходящее число: 60. Итак, чисто белых клеток: $64 - 60 = 4$ (клетки). Тогда, чисто чёрных клеток: $60 : 6 = 10$ (клеток), а все остальные клетки испачканные.

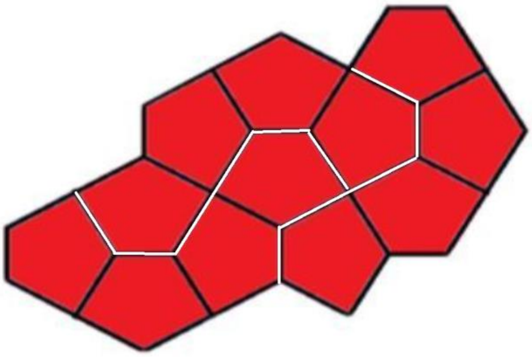
Ответ: чисто чёрных – 10;
чисто-белых – 4.

Задача 2.

Раздели выделенную фигуру по линиям «сетки» на три равные по форме и размеру части.



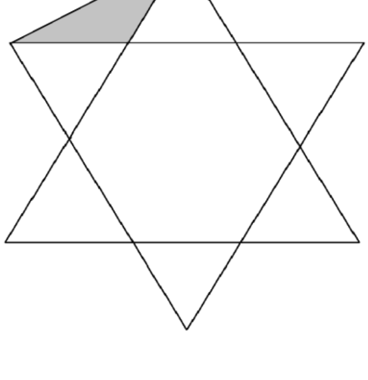
В фигуре всего 12 клеток. Значит, в каждой фигуре будет по: $12:3=4\,(\text{клетки})$. Принимая во внимание, что фигуры должны быть одинаковыми по форме, мы должны найти линии разреза, относительно которых фигуры симметричны. Данная задача не обладает явной симметрией, поэтому решать будем перебором. Тогда, воспользовавшись методом перебора четырёхклеточных фигур в данной задаче, мы увидим способ разрезать выделенную фигуру на 3 равные части:



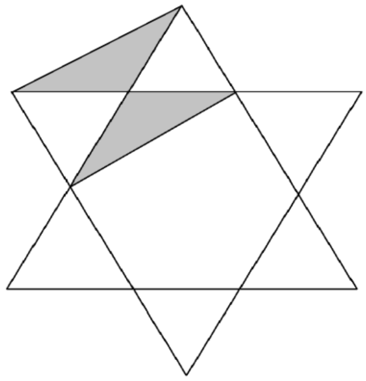
Эти змейки одинаковые и по форме, и по размеру, причём совместить правую фигуру с остальными возможно не движением, а переворотом. Значит, мы нашли способ разрезать фигуру на 3 равные части.

Задача 3.

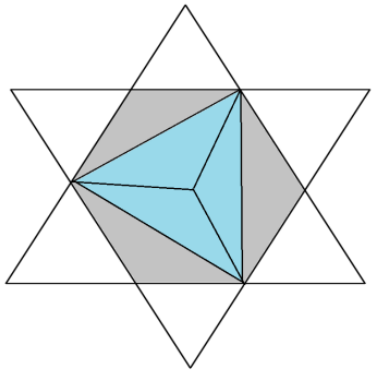
Площадь закрашенного треугольника равна 1. Найдите площадь звезды. Шестиугольник правильный, «лучи» звезды — равносторонние треугольники.



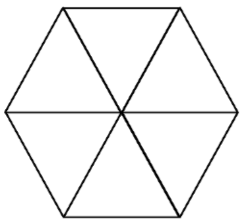
Обратим внимание на то, что серый треугольник равен другому серому треугольнику:



Заметим, что правильный шестиугольник можно разбить на «серые» треугольники следующим образом:



То есть, площадь шестиугольника равна 6 площадям серого треугольника и равна: $6 \cdot 1 = 6$. Также заметим, что из 6 треугольников, находящихся вне шестиугольника, тоже можно сложить тот же шестиугольник:



То есть, сумма площадей треугольников равна 6. Тогда, площадь всей звезды: $6 + 6 = 12$.

<u>Ответ:</u> 12.

<u>Задача 4.</u>

У Оксаны есть бусинки белого, красного и чёрного цветов. Оксана делает браслеты, в каждом из них встречаются бусинки одного или двух цветов. Известно, что: среди любых 16 браслетов найдётся чисто чёрный, среди любых 17 браслетов найдётся чисто красный, среди любых 18 браслетов найдётся чисто белый. Двухцветных браслетов 6. Какое максимальное число браслетов может быть у Оксаны?

Раз среди любых 16 браслетов найдётся чисто чёрный, значит, других браслетов не больше 15. Точно так же НЕ чисто красных не больше 16 и НЕ чисто белых не больше 17. У нас есть браслеты: чисто чёрные (ЧЧ), чисто красные (ЧК), чисто белые (ЧБ) и двухцветные (ДЦ). Запишем неравенства, основываясь на сделанных выводах:

$$\text{ЧК} + \text{ЧБ} + \text{ДЦ} \le 15$$
$$\text{ЧЧ} + \text{ЧБ} + \text{ДЦ} \le 16$$
$$\text{ЧЧ} + \text{ЧК} + \text{ДЦ} \le 17$$

Учтём, что двухцветных браслетов 6:

$$\text{ЧК} + \text{ЧБ} \le 9$$
$$\text{ЧЧ} + \text{ЧБ} \le 10$$
$$\text{ЧЧ} + \text{ЧК} \le 11$$

Теперь сложим все неравенства:

$$2 \cdot \text{ЧК} + 2 \cdot \text{ЧБ} + 2 \cdot \text{ЧЧ} \le 9 + 10 + 11$$
$$2 \cdot (\text{ЧК} + \text{ЧБ} + \text{ЧЧ}) \le 30$$

Значит, одноцветных браслетов ≤ 15. Так как ещё есть 6 двухцветных браслетов, то максимальное количество всех браслетов: $15 + 6 = 21$ (браслет).

Ответ: 21 браслет.

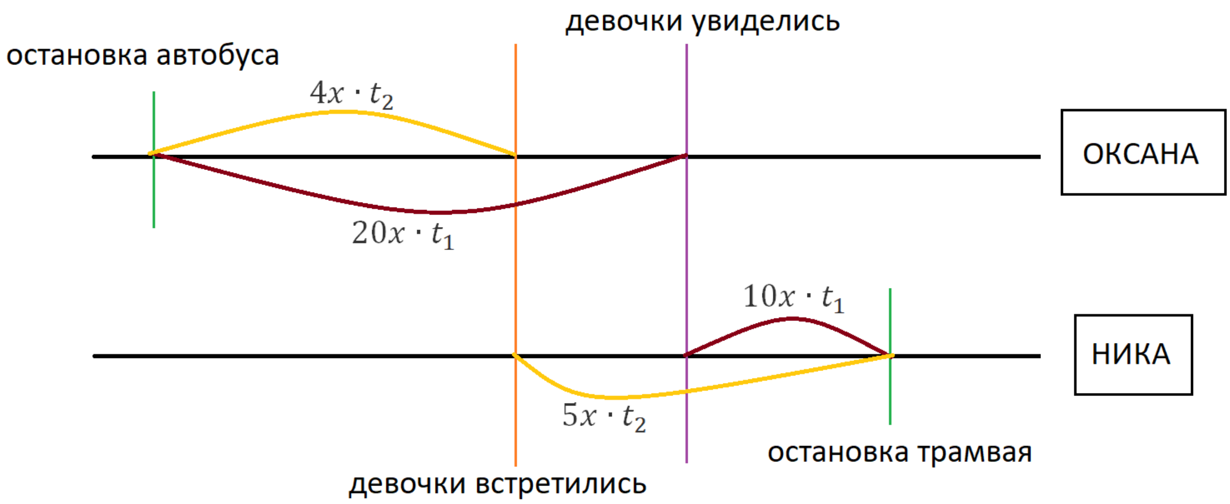
Задача 5.

Оксана ехала на автобусе и смотрела в окно. Когда автобус проезжал мимо двигающегося навстречу трамвая, Оксана увидела в нём свою лучшую подругу Нику. Они помахали друг другу и жестами договорились выйти на ближайших остановках и пойти навстречу друг другу. Автобус и трамвай остановились одновременно. Известно, что скорость автобуса в 2 раза больше скорости трамвая и в 5 раз больше скорости ходьбы Оксаны и в 4 раза больше скорости ходьбы Ники. Какое расстояние больше: от остановки автобуса до места встречи девочек или от места, где они увиделись, до остановки трамвая?

Введём обозначения. Пусть скорость автобуса равна $20x$, тогда скорость трамвая – $10x$, скорость ходьбы Оксаны – $4x$, а Ники – $5x$. Также введём времена: t_1 – время от момента, когда девочки увиделись до остановки транспорта, t_2 – время от момента остановки транспорта до встречи девочек. Мы знаем, что $\text{расстояние} = \text{скорость} \cdot \text{время}$. Напишем в таблицу, кто сколько прошёл и проехал:

автобус до остановки	$20x \cdot t_1$
трамвай до остановки	$10x \cdot t_1$
Оксана до встречи	$4x \cdot t_2$
Ника до встречи	$5x \cdot t_2$

Для бóльшей ясности нарисуем схематичную картинку:



Для того чтобы определить, какое расстояние больше: от остановки автобуса до места встречи девочек или от места, где они увиделись, до остановки трамвая, нужно найти соотношения времён t_1 и t_2. Для начала, наглядно посмотрим, какие расстояния мы сравниваем: *от верхней зелёной линии до оранжевой (<u>первое расстояние</u>)* и *от нижней зелёной линии до фиолетовой (<u>второе расстояние</u>)*. Из картинки видно, что *сумма двух бордовых линий = сумме двух жёлтых*. Запишем это:

$$20x \cdot t_1 + 10x \cdot t_1 = 4x \cdot t_2 + 5x \cdot t_2$$
$$30x \cdot t_1 = 9x \cdot t_2$$

Раздели обе части на $3x$:

$$10t_1 = 3t_2$$

Первое расстояние равно $4x \cdot t_2$, второе – $10x \cdot t_1$. Выразим t_2 через t_1:

$$t_2 = \frac{10}{3} t_1$$

Тогда, нам надо сравнить два расстояния: $4x \cdot \frac{10}{3} t_1$ и $10x \cdot t_1$. Заметим, что у них есть общий множитель $10x \cdot t_1$, но первое ещё умножается на 4 и делится на 3. $4:3 > 1$, значит, первое расстояние больше на $\frac{1}{3} x \cdot t_1$.

<u>Ответ:</u> от остановки автобуса до места встречи девочек больше.

Задача 6.

Сегодня Оксана празднует свой день рождения. Глядя на календарь, Оксана заметила, что если она сложит две цифры даты и две цифры месяца своего рождения (например, 21 ноября она бы сосчитала как 2+1+1+1) = 5), то получит сегодняшнее число (например, 21). В какой день (дата и месяц) у Оксаны может быть день рождения? Найдите все варианты.

Запишем дату в следующем виде: $ab.cd$. Заметим, что двузначное число всегда можно записать в следующем виде: $\overline{ab} = 10a + b$. По условию задачи: $a + b + c + d = 10a + b$. Или же: $c + d = 9a$. В месяце не бывает больше 31 дня. Значит, a может быть равно: $0, 1, 2, 3$. Месяцев всего 12, то есть c может быть равно: $0, 1$. Причём, если $c = 0$, то d может быть любой цифрой от 1 до 9, а если $c = 1$, то d может быть только 0, 1 или 2.

Также заметим, что сумма $(c + d) \vdots 9$. Единственное число, которое мы можем получить из наших c и d, чтобы оно делилось на 9 – это 9. 9 можно получить единственным способом при заданных условиях: если $c = 0$, а $d = 9$. Так как $c + d = 9$ и в то же время: $c + d = 9a$, то $a = 1$. Мы нашли 3 цифры из 4. Запишем, что у нас есть на данный момент: $1b.09$. То есть, подходящие даты десятые числа сентября. Проверим, все ли они подходят:

$b =$	дата	сумма
0	10.09	1+0+0+9=10
1	11.09	1+1+0+9=11
2	12.09	1+2+0+9=12
3	13.09	1+3+0+9=13
4	14.09	1+4+0+9=14
5	15.09	1+5+0+9=15
6	16.09	1+6+0+9=16
7	17.09	1+7+0+9=17
8	18.09	1+8+0+9=18
9	19.09	1+9+0+9=19

То есть, нам подходят все 10-е числа сентября (10-е включительно).

Ответ: все 10-е числа сентября, 10-е включительно.