

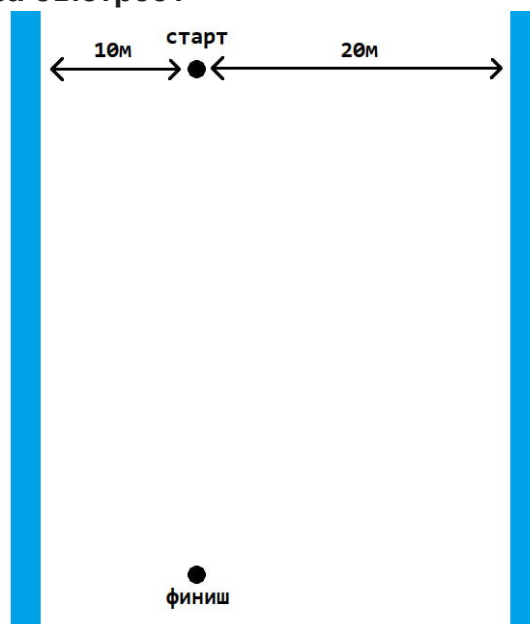


СИСТЕМАТИКА

Олимпиада по математике. 2 тур. 9 июля 2023

7 класс

1. Есть карточки с числами 123, 124, 134, 234 (с каждым числом - сколько угодно карточек).
Можно ли разложить их по кругу так, чтобы у каждой пары чисел, стоящих рядом, была одинаковая цифра, и каждая пара чисел с одинаковой цифрой встречалась рядом ровно один раз?
2. Про натуральные числа a, b, c известно, что:
 $\text{НОД}(a;b) + \text{НОД}(b;c) + \text{НОД}(a;c) = (a+b+c)/2$.
Докажите, что хотя бы одно из трёх чисел делится на другое.
3. Два брата решили посоревноваться в беге "с нагрузкой" по следующим правилам: у каждого брата есть ведро, братья стартуют вместе и финишируют в указанной на рисунке точке. Но перед тем как бежать на финиш, братья должны добежать до каналов и зачерпнуть оттуда воду - младший до левого, а старший до правого. Каналы с водой параллельны, но от старта до левого канала 10 метров, а до правого - 20 метров. Прямая, на которой находятся старт и финиш, параллельна каналам.
Кто выиграет, если оба брата выбрали наилучшие (кратчайшие) пути, но старший бежит в 2 раза быстрее?

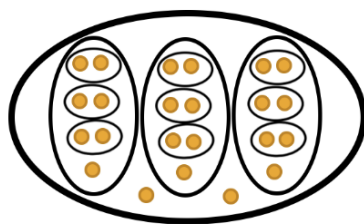


4. В стране роботов в качестве валюты используются бины. Известно, что бывают монеты номиналом в 1, 4 и 8 бинов.
Сколькими различными способами можно набрать сумму в 80 бинов, пользуясь такими монетами?

5. Гоблин Крюкохват хранит свои золотые монеты в большом мешке. Однажды, он захотел разложить их по более мелким мешочкам. Он делает это так: если количество монеток в каком-нибудь мешке больше трёх, он высыпает их все и пересчитывает; если их количество делится на 3, поровну раскладывает их в три мешка поменьше; если же количество высыпаемых монеток не делится на 3, то откладывает в сторону 1 или 2 монеты, чтобы оставшееся количество делилось на 3, поровну раскладывает оставшиеся в три мешка поменьше; потом все три мешка поменьше и отложенную 1 или 2 монеты (если они есть) складывает в исходный мешок обратно. Этот процесс он повторяет это до тех пор, пока может.

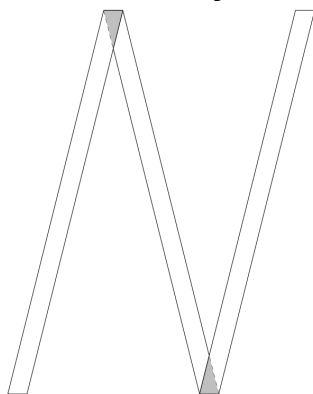
Сколько мешков понадобится, если у Крюкохвата 210 золотых монет?

Пример для 23-х монет показан на рисунке.



6. Полоску длины 2023 и ширины 23 сложили в форме буквы “N”, как показано на рисунке, причём углы, под которым складывали полоску в каждом из случаев, произвольны.

Какова минимальная суммарная площадь участков, закрашенных серым?



7. Трёхзначное натуральное число назовём крутым, если в нём можно переставить цифры так, что получится число, делящееся на 11. Если само число уже делится на 11, оно тоже является крутым.

Найдите количество крутых чисел.

8. На доске написано число 30. Двое играют в игру. За один ход разрешается вычесть из числа на доске какой-то точный квадрат, не больший написанного числа, стереть старое число и написать вместо него полученную разность.

Выигрывает тот, кто первым получит число 0.

Кто победит при правильной игре?