



СИСТЕМАТИКА

Олимпиада по математике. 2 тур. 9 июля 2023

8 класс

1. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла равна одному из двух отрезков, на которые она разделила противоположную сторону. **Докажите, что она вдвое длиннее второго из этих отрезков.**

2. Есть карточки с числами 123, 124, 134, 234 (с каждым числом - сколько угодно карточек). **Можно ли** разложить их по кругу так, чтобы у каждой пары чисел, стоящих рядом, была одинаковая цифра, и каждая пара чисел с одинаковой цифрой встречалась рядом ровно один раз?

3. В стране роботов в качестве валюты используются бины. Известно, что бывают монеты номиналом в 1, 4 и 8 бинов. **Сколькими способами можно набрать сумму в 80 бинов, пользуясь такими монетами?**

4. Известно, что

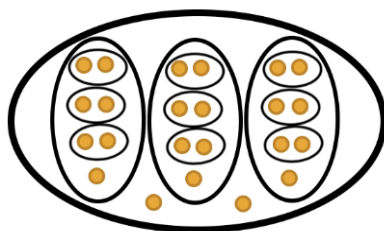
$$\frac{1}{x^2-2x+3} + \frac{1}{y^2+4y+7} + \frac{1}{z^2-6z+15} = 1.$$

Вычислите сумму $x + y + z$.

5. Гоблин Крюкохват хранит свои золотые монеты в большом мешке. Однажды, он захотел разложить их по более мелким мешочкам. Он делает это так: если количество монеток каком-нибудь мешке больше трёх, он высыпает их все и пересчитывает; если их количество делится на 3, поровну раскладывает их в три мешка поменьше; если же количество высыпаемых монеток не делится на 3, то откладывает в сторону 1 или 2 монеты, чтобы оставшееся количество делилось на 3, поровну раскладывает оставшиеся в три мешка поменьше; потом все три мешка поменьше и отложенную 1 или 2 монеты (если они есть) складывает в исходный мешок обратно. Этот процесс он повторяет это до тех пор, пока может.

Сколько мешков понадобится, если у Крюкохвата 210 золотых монет?

Пример для 23-х монет показан на рисунке.



6. Пять футболистов выстроились в ряд. У каждого на футболке написан номер от 1-го до 5-ти (все номера разные). Каждый футболист посчитал количество людей с номером, меньшим чем у него и стоящих по правую руку от него. Сумму посчитанных чисел назвали. После, они передвинулись циклически (первый перешел в конец шеренги), повторили предшествующие действия, назвали новое число и передвинулись снова. Повторили все несколько раз. В результате, были названы числа 6, 4, 8, 4, 4.

В каком порядке стояли футболисты изначально?

7. Трёхзначное натуральное число назовём крутым, если в нём можно переставить цифры так, что получится число, делящееся на 11. Если само число уже делится на 11, оно тоже является крутым.

Найдите количество крутых чисел.

8. Дракон пересчитал свои сокровища и решил построить на них новую башню из 10 этажей. В башне планируются этажи двух типов: с окнами и без. Дракон любит блеск солнечных лучей на своём золоте, поэтому хочет, чтобы на самом верхнем этаже обязательно было окно, и чтобы никакие два соседних этажа не могли одновременно быть без окон.

Сколько различных башен подойдёт под требования дракона?

(Различными будем считать башни, отличающиеся наличием или отсутствием окон хотя бы на одном этаже.)