



СИСТЕМАТИКА

Олимпиада по математике. 2 тур. 25 февраля 2024

5 класс

Решения и критерии оценки:

Задача 1

Все шарики весят одинаково, следовательно, вес белых шариков составляет $\frac{1}{3}$ от общего веса, т.е.

$$\frac{1}{3} * (65 + 235 + 104 + 131 + 365) = \frac{1}{3} * 900 = 300.$$

Вес чёрных шариков

$$900 - 300 = 600$$

В пятом мешке точно лежат чёрные шарики (так как $365 > 300$).

В мешках №3 и №4 лежат шарики одинакового цвета (иначе, суммарный вес шариков одного цвета не мог бы делиться на 5, что приводит к противоречию).

$365 + 235 = 600$, следовательно, во втором мешке могут быть чёрные шарики.

$365 + 104 + 131 = 600$, следовательно, в третьем и четвёртом мешке могут быть чёрные шарики.

$$365 + 65 = 430$$

$$600 - 430 = 170$$

170 уже никак не набрать при помощи оставшихся мешков, следовательно, в первом мешке не может быть чёрных шариков.

Ответ: взять шарик из первого мешка.

Критерии:

7 баллов - правильный ответ + решение.

4 баллов - правильный ответ + неполное решение

1-2 балла - по мере приближения к ответу.

Задача 2 - Пусть в колонии было N водорослей. Если одноклеточное разделится на 21 клетку, то их количество станет равно

$$N + 21 - 1 = N + 20.$$

Если оно разделится на 11 клеток, то их количество станет равно

$$N + 11 - 1 = N + 10.$$

Т.е., остаток от деления на 10 сохраняется.

Изначально, была 1 водоросль, т.е., подходят 1171, 1181, 1191.

Ответ: 1171, 1181 или 1191 водоросль.

Критерии:

7 баллов - правильный ответ + решение.

4-5 баллов - правильный ответ + неполное решение

1 балла - по мере приближения к ответу.

Задача 3

Так как в мешочке 1200 минусов и 250 плюсов, в конечном итоге из каждого числа вычтут 950. Найдем наибольшее количество чисел, которые в конечном счете могут оказаться положительными. Если взять максимальные числа (т.е, числа от 901 до 1000), то 50 из них окажутся положительными (числа от 951 до 1000). То есть, после последнего шага на доске окажется максимум 50 положительных чисел.

Теперь заметим, что два числа не могут перестать быть положительными за один шаг (иначе, они были бы равны). То есть, количество положительных чисел, если изменяется, то на 1. Вначале оно равнялось 100, в конце стало не более 50, следовательно, в какой-то момент оно равно 50, что и требовалось доказать.

Критерии:

7 баллов - правильный ответ + решение.

3-5 баллов - правильный ответ + неполное решение

1-2 балла - по мере приближения к ответу.

Задача 4 - Возьмем дроби $7/2$, $2/3$, $3/5$, $5/7$. Их произведение равно 1.

Докажем, что произведение меньшего числа сомножителей не может быть целым:

Пронумеруем их от 1 до 5. Допустим, в произведении присутствует дробь под номером k . Чтобы произведение было целым, ее знаменатель должен сократиться с числителем какой-то другой дроби. Так как он – простое число, сократиться он может только с равным числом. Единственная дробь, у которой числитель равен знаменателю дроби под номером k – это $(k+1)$ -я дробь. Значит, она тоже есть в произведении. К ней применяем те же рассуждения. И так далее, до 5-й дроби. Раз есть $5/7$, значит, есть $7/2$. Продолжаем так же до $(k-1)$ -й дроби. Значит, в произведении участвуют все дроби.

Ответ: например, $7/2$, $2/3$, $3/5$, $5/7$.

Критерии:

7 баллов - правильный ответ + полное решение.

4 баллов - правильный ответ + неполное решение

1-2 балла - по мере приближения к ответу.

Задача 5 - да



Ответ: существует

Критерии:

7 баллов - правильный ответ + решение.

4 баллов - правильный ответ + неполное решение

3 балла - правильный ответ без решения и следов решения.

2 балла - по мере приближения к ответу.

Задача 6

Пусть, число равно $10a + b$

Тогда, $10a + b = 10(a + b) + ab$

$b = 10b + ab$

$9b + ab = 0$

Такое может быть тогда, и только тогда, когда $b = 0$. a может быть любым.

Ответ: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90

Критерии:

7 баллов - правильный ответ + решение.

5 балла - правильный ответ без решения и следов решения.

1-3 балла - по мере приближения к ответу.

Задача 7

Очевидно, что подходят варианты, когда все рыцари или все лжецы. Других вариантов нет. Действительно, среди смотрящих на лужу есть и рыцари, и лжецы. Тогда найдем в круге рыцаря, у которого правый сосед является лжецом, такой, очевидно, найдется. Тогда второй и третий человек в круге от этого рыцаря будут рыцарями, так как этот рыцарь должен сказать правду. Но тогда и лжец по правую руку от него скажет правду, противоречие.

Ответ. 0 или 20.

Критерии:

7 баллов - правильный ответ + решение.

5 баллов - правильный ответ + неполное решение

1-3 балла - по мере приближения к ответу.