



СИСТЕМАТИКА

Олимпиада по математике. 2 тур. 25 февраля 2024

6 класс

Ответы и критерии оценки:

Задача 1 - 4 способа на основе разложения на простые множители одинаковой четности множителей:

45/1 57/35 255/251 507/505

Ответ: 4 способа

Критерии:

7 баллов - правильный ответ + решение.

1-4 балла - по мере приближения к ответу.

Задача 2

Пусть цена одной машинки x . Тогда за первую машинку первый брат отдал $7x/21$, второй отдал $2x/21$, третий отдал $6x/21$. За вторую машинку первый отдал $5x/15$, второй отдал $6x/15$, $4x/15$. Приведем все 6 дробей к общему знаменателю и получим: первый брат отдал за первую и вторую машинку $35x/105$ и $35x/105$ соответственно, второй отдал $10x/105$ и $42x/105$ и третий отдал $30x/105$ и $28x/105$. Значит третий брат отдал на 120 рублей за первую машинку больше, чем за вторую. Получим уравнение: $30x/105 - 28x/105 = 120$, $x = 6300$.

Ответ: 6300

Критерии:

7 баллов - правильный ответ + решение.

5-6 баллов - правильный ответ + неполное решение

1 балл - по мере приближения к ответу.

Задача 3

Критерии:

7 баллов - правильный ответ + решение.

5 баллов - правильный ответ + неполное решение

1-3 балла - по мере приближения к ответу.

Задача 4

Ответ: а) 15 минут; б) 3,5 км; в) 14:30

Критерии:

7 баллов - правильный ответ + решение.

5-6 баллов - правильный ответ + неполное решение

1-4 балла - по мере приближения к ответу.

Задача 5

Предположим, нашлись две дроби a/b и c/d такие, что $a > c$, $b < d$.

Докажем, что их сумма уменьшится, если поменять знаменатели местами.

$a/b + c/d - a/d - c/b = (a-c)/b - (a-c)/d = (a-c) \cdot (d-b)/bd$. Как мы видим, оба множителя в числителе положительные, следовательно, разность положительна.

Будем находить такие пары чисел и менять местами до тех пор, пока можем. Пусть, не нашлось ни одной такой пары. Докажем, что ряд состоит из дробей

$1/1, 2/2, 3/3, 4/4, \dots, 100/100$

Выстроим дроби по возрастанию знаменателей, т.е.

$1/a_1, 2/a_2, 3/a_3, \dots, 100/a_{100}$.

Для любых двух дробей числитель последующей больше числителя предыдущей, следовательно, то же верно и для знаменателей. Значит, знаменатели тоже выстроены по возрастанию, т.е. в порядке $1, 2, 3, \dots, 100$. Т.е., ряд выглядит так, как мы и предположили.

Каждая дробь равна единице, значит, их сумма равна 100. Так как мы только уменьшали первоначальную сумму, значит, она была не менее 100, что и требовалось доказать.

Ответ: возможно

Критерии:

7 баллов - правильный ответ + решение.

4 балла - правильный ответ + неполное решение

1-3 балла - по мере приближения к ответу.

Задача 6

Ответ: 116 рублей

Критерии:

7 баллов - правильный ответ + решение.

6 баллов - правильное решение, но допущена арифметическая ошибка

4 балла - правильный ответ без решения и следов решения.

1-2 балла - по мере приближения к ответу.

Задача 7

Все шарики весят одинаково, следовательно, вес белых шариков составляет $\frac{1}{3}$ от общего веса, т.е.

$$\frac{1}{3} * (65 + 235 + 104 + 131 + 365) = \frac{1}{3} * 900 = 300.$$

Вес чёрных шариков

$$900 - 300 = 600$$

В пятом мешке точно лежат чёрные шарики (так как $365 > 300$).

В мешках №3 и №4 лежат шарики одинакового цвета (иначе, суммарный вес шариков одного цвета не мог бы делиться на 5, что приводит к противоречию).

$365 + 235 = 600$, следовательно, во втором мешке могут быть чёрные шарики.

$365 + 104 + 131 = 600$, следовательно, в третьем и четвертом мешке могут быть чёрные шарики.

$$365 + 65 = 430$$

$$600 - 430 = 170$$

170 уже никак не набрать при помощи оставшихся мешков, следовательно, в первом мешке не может быть чёрных шариков.

Ответ: взять шарик из первого мешка.

Критерии:

7 баллов - правильный ответ + решение.

1-4 балла - по мере приближения к ответу.