

18 олимпиада 2 тур 8-9 класс

1. Гарри Поттер купил в Лавке Олливандера волшебную “вечную” свечу.
Первоначальная высота свечи - 30 см.

Гарри заметил, что первый сантиметр свечи сгорел ровно за 15 минут, а каждый следующий сантиметр горит столько же, сколько все предыдущие вместе взятые.

На сколько часов хватит свечи на самом деле?

Ответ: 2^{27} часов. Примечание: 2^{27} часов это примерно 15 300 лет.

Критерии:

0 – неверный ответ/нет решения

1 – неверный ответ, есть рассуждения

2 - верный ответ, нет решения

3 - неверный ответ, ход решения верный. но не до конца

4 – верный ответ, решение непонятно изложено

5 – верный ответ, решение недостаточно подробное

6 - верное решение, ошибка в ответе

7 – верный ответ, подробное решение

2. Решите уравнение в целых числах:

$$6xy + 4x = 15y + 299$$

Ответ: (2, -97), (11, 5), (-142, -1)

Критерии:

0 – неверный ответ/нет решения

1 – неверный ответ, есть рассуждения

2 - верный ответ, нет решения

3 - 1 верный ответ, решение недостаточное

4 - 2 верных ответа, решение недостаточное

5 - 1 верный ответ, подробное решение

6 – 2 верных ответа, подробное решение

7 – 3 (все) верных ответа, подробное решение

3. Петя написал на доске выражение:

$$* \cdot * \cdot * \cdot * \cdot * = 2025$$

Вася хочет заменить звёздочки цифрами из набора 1, 2, ..., 9, взяв каждую цифру не более одного раза, так, чтобы получить верное равенство. Сколькими способами Вася может это сделать?

Ответ: 4 варианта (24, если учитывать перестановку множителей)

Критерии:

0 – неверный ответ/нет решения

1 - неверный ответ, есть рассуждения

2 - верный ответ, нет решения

3 – 1 верный ответ (4), нет решения

4 - 1 верный ответ (4), решение недостаточное

5 - 1 верный ответ (1), подробное решение

6 - 1 верный ответ (4), подробное решение

7 – верный ответ (24), подробное решение

4. В стране Числонии есть города с названиями от 1 до 20.

Сначала из каждого города с меньшим номером провели авиалинию в каждый город с большим номером.

Будем называть *заменой* авиалинии ситуацию, когда из авиалинии ведущей из **A** в **B** делают авиалинию, ведущую из **B** в **A**.

Сначала заменили одну авиалинию из 2 в 20 город. А затем несколько раз брали какой-то город и заменяли все авиалинии, которые ведут **из** или **в** него.

Докажите, что в любой момент будут такие три города A, B и C, что из A есть линия в B, из B есть линия в C и из C есть линия в A.

Ответ: Будем следить за количеством ориентированных треугольников в графе (то есть вершины A B C такие, что из A есть линия в B, из B есть линия в C и из C есть линия в A). В изначальном графе их было 0 (так как в любом треугольнике 2 ребра выходят из вершины с меньшим номером). Когда авиалиния стала вести из 20 в 2 город, то появились 17 ориентированных треугольника с вершинами 2, 20 и еще любой от 3 до 19.

Докажем, что при любой дальнейшей замене их останется нечетно. Рассмотрим любую вершину v . Пусть из нее вели x авиалиний в города, которые мы назовем группой А, а в нее 19-х авиалиний в города, которые мы назовем группой Б. Между А и Б всего $x(19-x)$ авиалиний, что четное число. Часть из них ведет из А в Б, а остальные, наоборот, и поскольку сумма четна, то либо из А в Б идет четное число ребер и обратно тоже, либо из А в Б нечетное и обратно тоже. Осталось заметить, что с участием вершины v изначально было столько ориентированных треугольников, сколько ребер ведет из А в Б, а после замены столько, сколько ребер ведет из Б в А. Таким образом, ориентированных треугольников всегда нечетно, а значит, хотя бы 1.

Что и требовалось доказать.

Критерии:

0 – не доказано

- 1 – доказано обратное
- 2 - попытка доказательства
- 3 – доказательство не обосновано
- 5 – доказательство неполное
- 6 - доказательство не подробное
- 7 – доказательство полное

5. Есть клетчатый квадрат 6×6 , в котором некоторые клетки черные, а остальные белые. Известно, что в любом клетчатом прямоугольнике внутри, у которого обе стороны больше 1, хотя бы один из угловых квадратиков белый.

Сколько максимум черных квадратиков?

Ответ: 16

Критерии:

- 0 – неверный ответ, нет решения
- 1 – неверный ответ, есть рисунок
- 2 – неверный ответ, есть рассуждения
- 3 – неверный ответ, неверный ход решения
- 5 - верный ответ, нет решения
- 6 - верный ответ, нет решения, есть рисунок
- 7 – верный ответ, есть решение и рисунок

6. Чемпионат по футболу с участием 16 команд проходил в один круг (каждая команда играла с каждой ровно один матч; за победу дается 3 очка, а за ничью 1 очко).

В очередном туре все команды разбиваются на пары и команды из каждой пары проводят матч между собой.

При каком наименьшем k могло оказаться, что после k туров уже определена команда, которая получит 1-ое место и команда, которая получит 2-ое место, и результаты следующих матчей не могут на это повлиять?

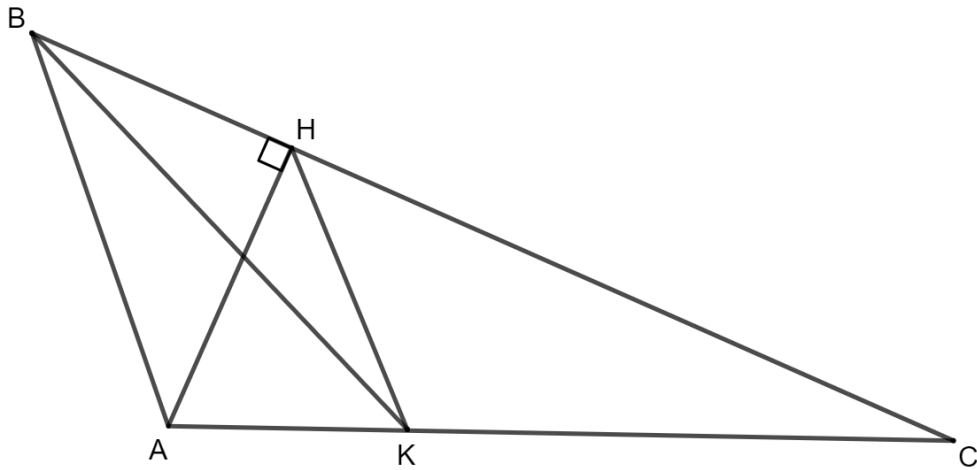
Ответ: 12

Критерии:

- 0 – неверный ответ, нет решения
- 1 – неверный ответ, неверное решение
- 2 - неверный ответ, есть правильные рассуждения
- 3 – неверный ответ, правильный ход решения, не до конца
- 4 – верный ответ, решение непонятное
- 5 - верный ответ, решение не подробное
- 6 - верный ответ, рассуждения недостаточные
- 7 – верный ответ, верное решение

7. AH – высота треугольника ABC (H лежит на стороне BC). На стороне AC нашлась точка K такая, что $BK=KC$ и $AH=HK$.

Докажите, что прямая HK делит площадь треугольника ABC пополам



Ответ: нет, не обязательно

Критерии:

0 – не доказано

1 - есть рассуждения, но ошибочные

2 - недостаточное доказательство

3 - доказательство не доведено до конца

4 – не доказано, в рассуждениях есть ошибка

6 - доказано, но в рассуждениях есть ошибка

7 – верное доказательство