



СИСТЕМАТИКА

Олимпиада по математике. 2 тур. 26 октября 2025

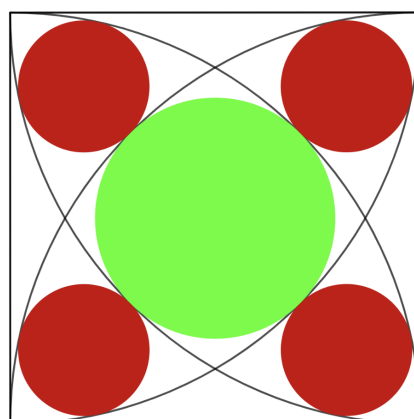
9 класс

1. Найдите все пары натуральных чисел m и n , для которых выполняется равенство:

$$\frac{n}{8} + \frac{18}{n} = m.$$

2. В квадрате провели четыре окружности с центрами в вершинах и радиусами равными стороне квадрата. В образовавшиеся фигуры вписаны 5 кругов.

Что больше: площадь зелёного круга или сумма площадей четырёх красных? Во сколько раз?



3. Чему равен минимум следующего выражения при условии, что $x, y, z > 0$:

$$\frac{5xyz + x^2z + 3xy^2 + 9yz^2}{xyz}$$

4. Верно ли, что, **если прямоугольник можно разрезать на четыре не обязательно различных квадрата с целыми сторонами**, то такой набор квадратов является единственным для данного прямоугольника? (разумеется, порядок квадратов в наборе не важен, а разрезания, отличающиеся поворотом или симметрией, будут давать одинаковые наборы)

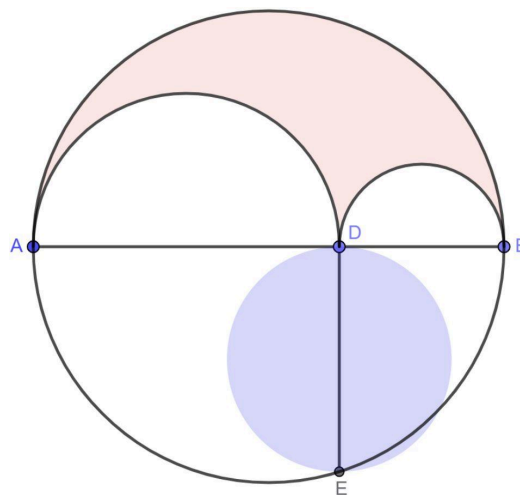
5. Напомним, что средним геометрическим двух неотрицательных чисел x и y называется квадратный корень из их произведения \sqrt{xy} . В кабинете математики одной математической школы висит три доски. Тройняшки Настя, Иван и Анна решили написать на этих досках по 33 числа. Настя пишет на левой доске слева направо квадраты подряд идущих натуральных чисел от 1 до 33. Иван пишет на правой доске справа налево квадраты подряд идущих натуральных чисел от 34 до 66. Потом приходит Анна и на средней доске пишет удвоенные средние геометрические чисел с досок, на которых писали Настя и Иван, равноудалённых от числа, которое пишет Анна (например, крайним левым числом на средней доске будет удвоенное среднее геометрическое крайних левых чисел с левой и правой досок и так далее).

Чему равна сумма всех чисел, написанных на трёх досках?

Чему равен периметр этого прямоугольника?

6. В волшебном лесу живут эльфы и феи, которые постоянно ссорятся. Но в День начала осени короли Оберон собирает их на одной полянке круглой полянке. В этом году сказочные создания решили поступить по-умному и разделить места для танцев эльфов и фей так, чтобы они не встречались и не ссорились. Для этого круглую полянку разбили на две части, проведя диаметр AB , на нём выбрали произвольную точку D , а от неё восстановили перпендикуляр DE до точки E на крае полянки. Построили полукруги с диаметрами AD и DB , и вся часть полянки выше этих полукругов (на рисунке выделена красным) досталась феям. А эльфам достался круг, диаметром которого является отрезок DE (на рисунке выделен синим).

Кому досталось больше места для танцев в этот День начала осени: эльфам или феям?



7. Напомним, как работают системы счисления с натуральным основанием $n > 1$:

на каждом месте числа стоит цифра от 0 до $n - 1$ включительно (но 0 не может быть самой первой цифрой);

каждая следующая цифра при прочтении числа справа налево умножается на следующую степень числа n , начиная со степени 0.

Будем записывать число в системе счисления с основанием

n так:

$$\overline{\dots xyz}_n.$$

Так, с основанием 6 получим:

$$\overline{2025}_6 = 5 \cdot 6^0 + 2 \cdot 6^1 + 0 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^3 = 449,$$

а с основанием 7 получим:

$$\overline{2025}_7 = 5 \cdot 7^0 + 2 \cdot 7^1 + 0 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^3 = 705.$$

Найдите все двузначные числа в десятичной системе счисления,

которые при записи в системе счисления с каким-то другим основанием будут записаны той же парой цифр, взятой дважды (то есть такие цифры a и b и такие натуральные основания n , для которых верно равенство:

$$\overline{ab}_{10} = \overline{abab}_n).$$