10 класс

XXI Олимпиада по математике

СИСТЕМАТИКА

Задача 1

Чему равно значение выражения:
$(2025+2026)(2025^2+2026^2)(2025^4+2026^4)(2025^8+2026^8)(2025^{16}+2026^{16})(2025^{32}+2026^{32})$

Варианты ответа:

А. $2026^{64} - 2025^{64}$
Б. $2026^{63} + 2025^{63}$
В. $2026^{64} + 2025^{64}$
Г. 4051^{64}

Задача 2

При каком натуральном n значение выражения $\sqrt[6]{2025 + \frac{2026!}{n!}}$ является целым числом?

Варианты ответа:

А. $n = 2022$
Б. $n = 2023$
В. $n = 2024$
Г. $n = 2025$.

Задача 3

Для действительных чисел x, y, z найдите минимальное значение выражения:

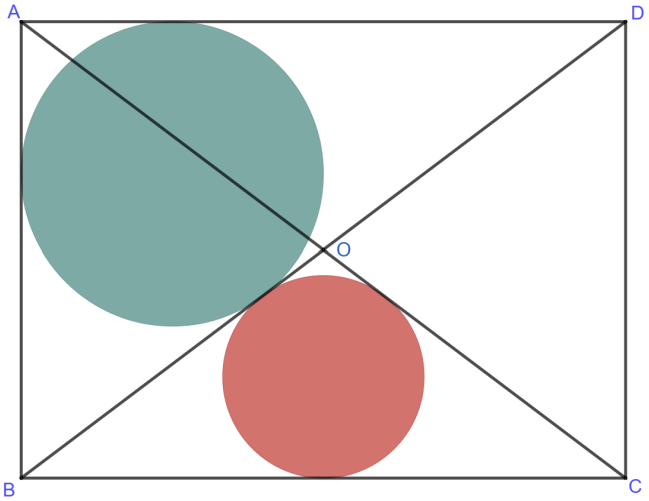
$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 4x + 6y + 40.$$

Варианты ответа:

А. 40
Б. 27
В. 36
Г. 45

Задача 4

Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Большая окружность вписана в треугольник ABD, а малая — в треугольник BOC (см. рисунок). Радиус большой окружности в 1,5 раза больше радиуса малой. Чему равно отношение сторон прямоугольника (меньшая сторона к большей)?



Варианты ответа:

А. $\frac{1}{2}$

Б. $\frac{2}{3}$

В. $\frac{3}{4}$

Г. $\frac{3}{5}$.

Задача 5

Корни уравнения

$$x^2 + [a]x + [b] = 0$$

в два раза больше соответствующих корней уравнения

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (a \neq 0,\ b \neq 0),$$

где $[a]$ — целая часть числа a.

Чему равен наибольший из корней второго уравнения? Ответ округлите с точностью до десятых.

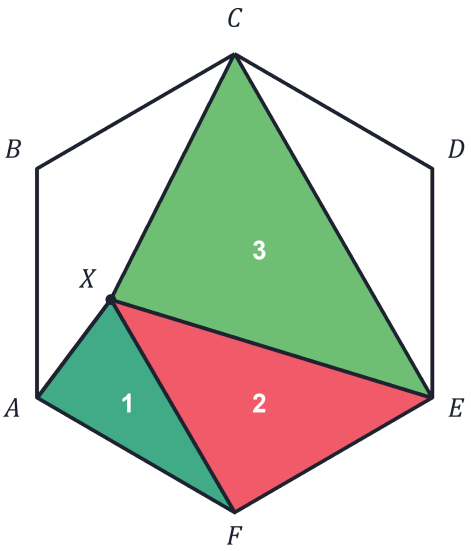
Варианты ответа:
А. 0.5
Б. 0.8
В. 1.2
Г. 1.6

Задача 6

Трёхзначное число N состоит из различных ненулевых цифр. Сумма всех шести двузначных чисел, составленных из этих цифр без повторения, делится без остатка на N. Найдите наибольшее такое число N.

Задача 7

Внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$ взята точка X. Оказалось, что площади треугольников AXF, FXE и EXC равны соответственно 1, 2 и 3.
Чему равна площадь шестиугольника?



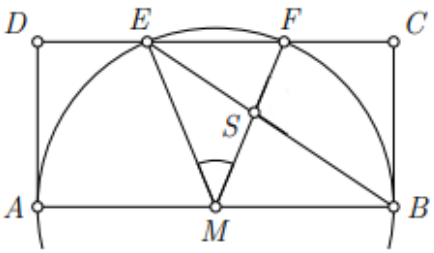
Варианты ответа:

А. 6
Б. 8
В. 9
Г. 12

Задача 8

Сторона AB прямоугольника $ABCD$ является диаметром окружности с центром M. Окружность пересекает сторону CD в точках E и F (при этом точка E лежит между D и F). Отрезки MF и BE пересекаются в точке S. Известно, что для отношения сторон выполняется условие

$$|AB|:|AD| = 3:\sqrt{2}.$$



Чему равно отношение $DE:EF$?

Варианты ответа:

А. 1

Б. $\frac{4}{5}$

В. $\frac{2}{3\sqrt{2}}$

Г. $\frac{3}{2}$.

Задача 9

Сколько существует четверок положительных целых чисел (m, n, p, q), удовлетворяющих уравнению:

$$99m + 199n + 299p + 399q = 3289?$$

Варианты ответа:

А. 1
Б. 3
В. 5
Г. 8.

Задача 10

Сколько существует действительных чисел r, таких, что и r, и

$$\frac{1}{r}$$

имеют не более 10 знаков после запятой в своём десятичном представлении?

Варианты ответа:

А. 242

Б. 400

В. 441

Г. 882