11 класс

XXI Олимпиада по математике

СИСТЕМАТИКА

Задача 1

На ежевековой межпланетной конференции присутствовали делегации с 1000 разных планет, каждая из которых говорит только на своем родном языке. Организаторы конференции хотят нанять переводчиков так, чтобы каждый делегат имел возможность поговорить с любым другим делегатом, используя при этом максимум двух переводчиков из предоставленных организаторами. Каждый переводчик говорит ровно на 2 языках. Какое минимальное количество переводчиков нужно нанять организаторам съезда?

Задача 2

При каком натуральном n значение выражения

$$\sqrt[6]{2025 + \frac{2026!}{n!}}$$

является целым числом?

Варианты ответа:

А. $n = 2022$
Б. $n = 2023$
В. $n = 2024$
Г. $n = 2025$

Задача 3

Для действительных чисел x, y, z найдите минимальное значение выражения:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 4x + 6y + 40.$$

Варианты ответа:

А. 40
Б. 27
В 36
Г. 45

Задача 4

Сколько существует натуральных чисел m, таких, что

$$m^2 - 40m + 402 = S(m),$$

где $S(m)$ – сумма цифр числа m?

Варианты ответа:

А. 0

Б. 1

В. 2

Г. бесконечно много.

Задача 5

На продолжении диагонали прямоугольного параллелепипеда взята точка K. Расстояния от K до ближайшей вершины и трёх соседних с ней вершин равны 1, 2, 3, 5. Чему равно расстояние от этой точки до его наиболее удалённой вершины?

Варианты ответа:

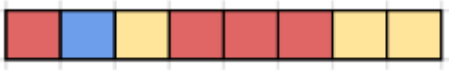
А. $4\sqrt{2}$

Б. 6

В. $2\sqrt{10}$

Г. 7

Задача 6

Сколько существует способов раскрасить клетки полоски 1 × 16 в красный, синий и жёлтый цвета (не обязательно используя все три цвета) так, чтобы полоска содержала ровно 5 одноцветных областей? Симметричные раскраски считаем различными. Одноцветная область — это несколько подряд идущих клеток одного цвета, так что слева и справа от области находится конец полоски или другой цвет. Например, на рисунке ниже полоска 1 × 8 содержит 5 одноцветных областей. 

Варианты ответа:

А. 32760
Б. 65520
В. 131040
Г. 331695

Задача 7

Сколько существует действительных чисел r, таких, что и r, и

$$\frac{1}{r}$$

имеют не более 10 знаков после запятой в своём десятичном представлении?

Варианты ответа:

А. 242

Б. 400

В. 441

Г. 882

Задача 8

В основании прямой призмы лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$ (верхним основанием служит, разумеется, правильный шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$). Внутри призмы взяли точку S так, что объёмы тетраэдров $SABB_1$, $SBEE_1$ и $SECC_1$ равны 1, 2 и 3 соответственно. Чему равен объём призмы?

Варианты ответа:

А. 18

Б. 24

В. 27

Г. 30.

Задача 9

Сколько существует четверок положительных целых чисел (m, n, p, q), удовлетворяющих уравнению:

$$99m + 199n + 299p + 399q = 3289?$$

Варианты ответа:

А. 1

Б. 3

В. 5

Г. 8.

Задача 10

Чему равна сумма всех действительных корней уравнения

$$x^4 - x^2 = 10x + 1?$$

Варианты ответа:

А. 0

Б. $2 - \sqrt{5}$

В. $\sqrt{5}$

Г. $2 + \sqrt{5}$.